УДК 519.174

Т. А. Королева

ХРОМАТИЧЕСКАЯ ОПРЕДЕЛЯЕМОСТЬ НЕКОТОРЫХ ПОЛНЫХ ТРЕХДОЛЬНЫХ ГРАФОВ. II

В данной работе рассматриваются только обыкновенные графы, т. е. графы без петель и кратных ребер. Обозначения и терминологию для графов будем использовать в соответствии с [1] и [2].

Различными авторами были проведены многочисленные исследования по изучению хроматической эквивалентности и хроматической определяемости для графов. Обзор полученных результатов можно найти в монографии [3]. В этих исследованиях большое место было уделено изучению хроматической определяемости полных многодольных графов $K(n_1, n_2, \ldots, n_t)$. Главная проблема здесь состоит в следующем.

Является ли хроматически определяемым полный многодольный граф $K(n_1, n_2, \ldots, n_t)$ при $t \geqslant 3$ и $n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_t \geqslant 2$?

Для случая $t = 3$ разными авторами были указаны некоторые классы хроматически определяемых полных трехдольных графов (см. [3]).

Цель данной работы состоит в том, чтобы доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть n, n_1, n_2, n_3 — натуральные числа такие, что*

$$n = n_1 + n_2 + n_3, \quad n_1 \geqslant n_2 \geqslant n_3 \geqslant 2, \quad n \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 3) \quad \textit{и} \quad n_1 - n_3 \leqslant 4.$$

Тогда граф $K(n_1, n_2, n_3)$ является хроматически определяемым.

Данная теорема дает новый класс хроматически определяемых полных трехдольных графов. Отметим, что справедлив аналог теоремы для случая $n \equiv 1(mod\ 3)$. Доказательству этого аналога будет посвящена другая работа автора.

Предварительные сведения

Пусть n – некоторое натуральное число и $n = 3 \cdot q + 2$, т. е. $t = 3$ и $r = 2$. Легко видеть, что нижние этажи решетки $NPL(n, 3)$ устроены следующим образом:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
(q+3,q+3,q-4) \arrow[dr, Rightarrow, "6"'] & & (q+4,q+1,q-3) \arrow[dl, Rightarrow, "2"] \arrow[dr, Rightarrow, "3"'] & & (q+5,q-1,q-2) \arrow[dl, Rightarrow, "5"] \\
& (q+3,q+2,q-3) \arrow[dr, Rightarrow, "4"'] & & (q+4,q,q-2) \arrow[dl, Rightarrow, "3"] \arrow[dr, Rightarrow, "1"'] & \\
& & (q+3,q+1,q-2) \arrow[dl, Rightarrow, "1"] \arrow[dr, Rightarrow, "2"'] & & (q+4,q-1,q-1) \arrow[dl, Rightarrow, "4"] \\
& (q+2,q+2,q-2) \arrow[dr, Rightarrow, "3"'] & & (q+3,q,q-1) \arrow[dl, Rightarrow, "2"] & \\
& & (q+2,q+1,q-1) \arrow[dr, Rightarrow, "1"'] & & \\
& & & (q+2,q,q) \arrow[dl, Rightarrow, "1"] & \\
& & (q+1,q+1,q) & &
\end{tikzcd}$$

На этом рисунке рядом с отношением покрытия указано отвечающее ему значение $\delta - 1$ (см. [2]).

Лемма 1. 1) $I_4(q+2,q+2,q-2) - I_4(q+2,q+1,q-1) = 6q+6$.
2) $I_4(q+3,q,q-1) - I_4(q+2,q+1,q-1) = -5q+2$.
3) $I_4(q+2,q+1,q-1) - I_4(q+2,q,q) = 2q+1$.
4) $I_4(q+2,q,q) - I_4(q+1,q+1,q) = -q$.

Доказательство проводится простыми вычислениями в соответствии с леммой 3 [2].

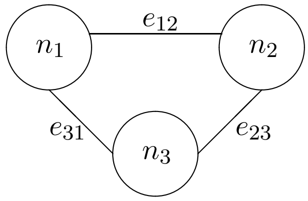
Пусть $G = K(q+\alpha_1, q+\alpha_2, q+\alpha_3)$, $n = q+\alpha_1+q+\alpha_2+q+\alpha_3$, $u = (q+\alpha_1, q+\alpha_2, q+\alpha_3)$, где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — некоторые целые числа. В дальнейшем при доказательстве χ-определяемости графа G при некоторых значениях $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ мы всегда будем рассматривать некоторый χ-эквивалентный ему граф H и от противного предполагать, что H неизоморфен G.

Такой граф H обязан быть 3-хроматическим графом. Рассмотрим его 3-раскраску с долями размера n_1, n_2, n_3, где $n_1 \geqslant n_2 \geqslant n_3$ и $n = n_1+n_2+n_3$. В силу предложения 1 из [2] имеем $H = K(n_1,n_2,n_3) - E$ для некоторого непустого множества ребер E графа $K(n_1,n_2,n_3)$. Ясно, что

$$I_2(G) = I_2(H) = I_2(n_1,n_2,n_3) - |E|, \quad \text{т. е.} \quad I_2(n_1,n_2,n_3) = I_2(G) + |E|.$$

Следовательно, в графе $K(n_1,n_2,n_3)$ ребер больше, чем в G точно на $|E|$.

Положим $v = (n_1, n_2, n_3) = (q + \beta_1, q + \beta_2, q + \beta_3)$ для некоторых целых чисел $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ и $|E| = e$. Через E_{ij} для $i, j = 1, 2, 3$ обозначим множество ребер из E, соединяющих вершину из i-й компоненты с вершиной из j-й компоненты. Тогда $E = E_{12} \dot{\cup} E_{23} \dot{\cup} E_{31}$, где объединяемые множества попарно не пересекаются. Положим $e_{12} = |E_{12}|$, $e_{23} = |E_{23}|$, $e_{31} = |E_{31}|$. Ясно, что $e = e_{12} + e_{23} + e_{31}$.



Используя введенные в [2] обозначения, имеем $I_3(u) = I_3(v) - \xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3$, т. е.

$$\xi_1 - \xi_2 - 2\xi_3 = -(I_3(u) - I_3(v)).$$

Аналогично имеем $I_4(u) = I_4(v) + \eta - \eta_1 + \eta_2 + 2\eta_3 + 3\eta_4$, т. е.

$$\eta - \eta_1 + \eta_2 + 2\eta_3 + 3\eta_4 = I_4(u) - I_4(v).$$

Предложение 1. *Граф $G = K(q+1, q+1, q)$ является χ-определяемым при $q \geqslant 1$.*

Доказательство. Для графа H в данном случае в силу леммы 1 [2] выполняется $I_2(n_1, n_2, n_3) < I_2(q + 1, q + 1, q)$, так как $(n_1, n_2, n_3) > (q + 1, q + 1, q)$. С другой стороны, $I_2(n_1, n_2, n_3) = I_2(G) + |E|$, что противоречиво.

Основные результаты

Предложение 2. *Граф $G = K(q + 2, q, q)$ является χ-определяемым при $q \geqslant 2$.*

Доказательство. Для графа H в данном случае имеем $v = (q + 1, q + 1, q)$ и $e = 1$. Ясно, что $\xi_2 = \xi_3 = 0$ и $\xi_1 = -(I_3(u) - I_3(v)) = q$ в силу леммы 2 [2]. Поскольку $\xi_1 = e_{12}q + e_{23}(q + 1) + e_{31}(q + 1)$, отсюда вытекает $e_{12} = 1$ и $e_{23} = e_{31} = 0$. Тогда $\eta = \binom{q}{2}$, $\eta_1 = q \cdot q$, $\eta_2 = \eta_3 = \eta_4 = 0$, поэтому с учетом леммы 1 имеем

$$\binom{q}{2} - q^2 = \eta - \eta_1 + \eta_2 + 2\eta_3 + 3\eta_4 = I_4(u) - I_4(v) = -q.$$

Откуда, сокращая на q, получаем $\frac{q-1}{2} - q = -1$, т. е. $q = 1$, что невозможно.

Предложение 3. *Граф* $G = K(q+2, q+1, q-1)$ *является* χ*-определяемым при* $q \geqslant 3$.

Доказательство. Для графа H в данном случае выполняется $v = (q+2, q, q)$ или $v = (q+1, q+1, q)$.

1-й случай. Пусть $v = (q+2, q, q)$. Тогда $e = 1$ и $\xi_2 = \xi_3 = 0$, поэтому в силу леммы 2 [2] $\xi_1 = -(I_3(u) - I_3(v)) = q+2$. Поскольку

$$\xi_1 = e_{12}q + e_{23}(q+2) + e_{31}q,$$

отсюда вытекает $e_{23} = 1$ и $e_{12} = e_{31} = 0$. Тогда $\eta = \binom{q+2}{2}$, $\eta_1 = (q-1)^2$ и $\eta_2 = \eta_3 = \eta_4 = 0$, поэтому с учетом леммы 1 имеем

$$\binom{q+2}{2} - (q-1)^2 = I_4(u) - I_4(v) = 2q+1.$$

Следовательно, $(q+2)(q+1) - 2(q-1)^2 = 4q+2$, т. е. $q^2 - 3q + 2 = 0$, $q = 1$ или $q = 2$, что невозможно.

2-й случай. Пусть $v = (q+1, q+1, q)$. Тогда $e = 1+1 = 2$, $\xi_3 = 0$ и

$$\xi_1 - \xi_2 = -(I_3(u) - I_3(v)) = (q+2) + q = 2(q+1).$$

Очевидно,

$$\xi_1 = e_{12}q + e_{23}(q+1) + e_{31}(q+1).$$

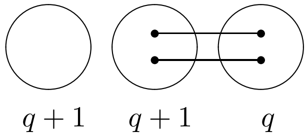
Если $e_{12} \neq 0$, то в силу условия $2 = e_{12} + e_{23} + e_{31}$ получаем $\xi_1 < 2(q+1)$, поэтому $\xi_1 - \xi_2 < 2(q+1)$, что противоречиво. Таким образом, $e_{12} = 0$. Тогда имеем $\xi_1 = (e_{23} + e_{31})(q+1) = 2(q+1) = \xi_1 - \xi_2$, т. е. $\xi_2 = 0$.

Учитывая условия $e_{12} = 0$ и $\xi_2 = 0$, получаем $\eta = 2\binom{q+1}{2}$ и $\eta_1 = 2q(q-1)$. Очевидно, $\eta_3 = \eta_4 = 0$. Тогда

$$\begin{aligned}\eta_2 &= I_4(u) - I_4(v) - \eta + \eta_1 = \\ &= (2q+1) + (-q) - (q+1)q + 2q^2 - 2q = q^2 - 2q + 1.\end{aligned}$$

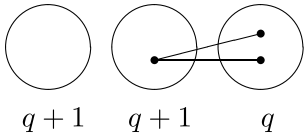
В силу условий $e_{12} = 0$, $2 = e_{23} + e_{31}$ и $\xi_2 = 0$ рассмотрим четыре возможных случая и подсчитаем в каждом из них η_2:

а)

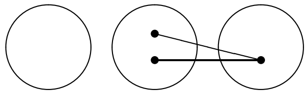


$\eta_2 = 1$

б)

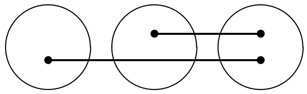


$\eta_2 = q$

в) 

$q+1 \quad q+1 \quad q$

$\eta_2 = q-1$

г) 

$q+1 \quad q+1 \quad q$

$\eta_2 = 0$

Во всех случаях имеем $\eta_2 < q+1$. Тогда $q^2 - 2q + 1 < q + 1$, т. е. $q^2 - 3q < 0$ и поэтому $0 < q < 3$, что противоречиво.

Предложение 4. *Граф $G = K(q+2, q+2, q-2)$ является χ-определяемым при $q \geqslant 4$.*

Доказательство. Для графа H в данном случае разбиение v может совпадать с одним из следующих разбиений: $(q+3, q, q-1)$, $(q+2, q+1, q-1)$, $(q+2, q, q)$, $(q+1, q+1, q)$.

1-й случай. Пусть $v = (q+3, q, q-1)$. Тогда $e = 3 - 2 = 1$ и $\xi_2 = \xi_3 = 0$. Поэтому

$$\begin{aligned}\xi_1 &= -(I_3(u) - I_3(v)) = \\ &= -(I_3(u) - I_3(q+2, q+1, q-1) - (I_3(v) - I_3(q+2, q+1, q-1))) = \\ &= 3(q+2) - 2(q-1) = q + 8.\end{aligned}$$

С другой стороны, в силу $e = 1$ число $\xi_1 = e_{12}(q-1) + e_{23}(q+3) + e_{31}q$ равно одному из чисел $q-1$, $q+3$, q, что невозможно.

2-й случай. Пусть $v = (q+2, q+1, q-1)$. Тогда $e = 3$ и

$$\xi_1 - \xi_2 - 2\xi_3 = -(I_3(u) - I_3(v)) = 3(q+2).$$

Очевидно,

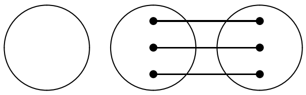
$$\xi_1 = e_{12}(q-1) + e_{23}(q+2) + e_{31}(q+1).$$

Если $e_{12} \neq 0$ или $e_{31} \neq 0$, то $\xi_1 < 3(q+2)$ и поэтому $\xi_1 - \xi_2 - 2\xi_3 < 3(q+2)$, что противоречиво. Таким образом, $e_{12} = e_{31} = 0$ и $e_{23} = 3$.

Тогда ясно, что $\eta = 3\binom{q+2}{2}$, $\eta_1 = 3q(q-2)$ и $\eta_4 = 0$. Следовательно,

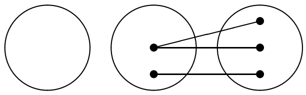
$$\begin{aligned}\eta_2 + 2\eta_3 &= I_4(u) - I_4(v) - \eta + \eta_1 = \\ &= 6q + 6 - \frac{3}{2}(q+2)(q+1) + 3q(q-2) = \frac{1}{2}(3q^2 - 9q + 6).\end{aligned}$$

Рассмотрим шесть возможных случаев и подсчитаем в каждом из них $\eta_2 + 2\eta_3 = x$:

а) 

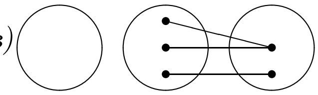
$q+2 \quad q+1 \quad q-1$

$x = \binom{3}{2} + 2 \cdot 0 = 3$

б) 

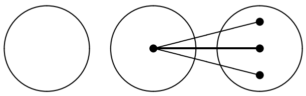
$q+2 \quad q+1 \quad q-1$

$x = q + 2 + 2 \cdot 0 = $
$= q + 2$

в) 

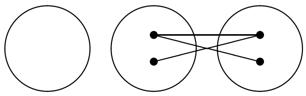
$q+2 \quad q+1 \quad q-1$

$x = (q-2) + 2 +$
$+ 2 \cdot 0 = q$

г) 

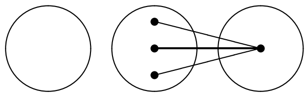
$q+2 \quad q+1 \quad q-1$

$x = \binom{3}{2} q + 2 \cdot 0 = 3q$

д) 

$q+2 \quad q+1 \quad q-1$

$x = (q-1) + (q-3) +$
$+ 2 + 2 \cdot 0 = 2q - 2$

е) 

$q+2 \quad q+1 \quad q-1$

$x = \binom{3}{2}(q-2) +$
$+ 2 \cdot 0 = 3(q-2)$

В случае г) имеем $\frac{1}{2}(3q^2 - 9q + 6) = 3q$, т.е. $q^2 - 5q + 2 = 0$ и поэтому $q = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$, что невозможно, так как q — целое число.

В остальных случаях всегда выполняется $\eta_2 + 2\eta_3 < 3(q-1)$, так как $q \geqslant 4$. Отсюда следует $\frac{1}{2}(3q^2 - 9q + 6) < 3(q-1)$, т.е. $q^2 - 5q + 4 < 0$ и поэтому $1 < q < 4$, что противоречиво.

3-й случай. Пусть $v = (q+2, q, q)$. Тогда $e = 3 + 1 = 4$ и

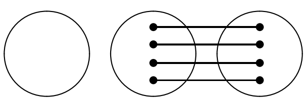
$$\xi_1 - \xi_2 - 2\xi_3 = -(I_3(u) - I_3(v)) = 3(q+2) + 1(q+2) = 4(q+2).$$

Очевидно, $\xi_1 = e_{12}q + e_{23}(q+2) + e_{31}q$ и $4 = e_{12} + e_{23} + e_{31}$. Отсюда легко следует, что $e_{12} = e_{31} = 0$ и $e_{23} = 4$.

Теперь ясно, что $\eta = 4\binom{q+2}{2}$, $\eta_1 = 4(q-1)^2$ и

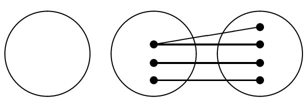
$$\eta_2 + 2\eta_3 + 3\eta_4 = I_4(u) - I_4(v) - \eta + \eta_1 =$$
$$= (6q+6) + (2q+1) - 2(q+2)(q+1) + 4(q-1)^2 = 2q^2 - 6q + 7.$$

Рассмотрим следующие десять возможных случаев и в каждом из них подсчитаем $\eta_2 + 2\eta_3 + 3\eta_4 = x$:

а) 

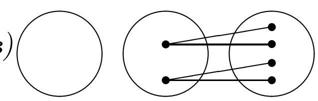
$q+2 \quad q \quad q$

$x = \binom{4}{2} + 2 \cdot 0 +$
$+ 3 \cdot 0 = 6$

б) 

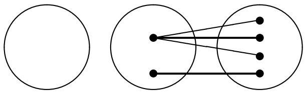
$q+2 \quad q \quad q$

$x = q - 1 + 5 + 2 \cdot 0 +$
$+ 3 \cdot 0 = q + 4$

в) 

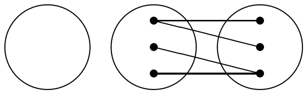
$q+2 \quad q \quad q$

$x = 2(q-1) + 4 +$
$+ 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 2q + 2$

г) 

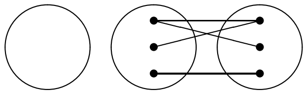
$q+2 \quad q \quad q$

$x = 3(q-1)+3+$
$+2\cdot 0+3\cdot 0 = 3q$

д) 

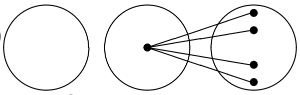
$q+2 \quad q \quad q$

$x = 2q+2$

е) 

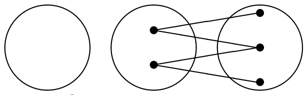
$q+2 \quad q \quad q$

$x = 2(q-2)+3+$
$+2\cdot 1+3\cdot 0 = 2q+1$

ж) 

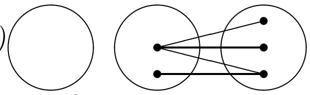
$q+2 \quad q \quad q$

$x = \binom{4}{2}(q-1)+$
$+2\cdot 0+3\cdot 0 =$
$= 6(q-1)$

з) 

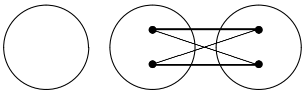
$q+2 \quad q \quad q$

$x = 2(q-2)+(q-3)$
$+1+2\cdot 2+3\cdot 0 =$
$= 3q-2$

и) 

$q+2 \quad q \quad q$

$x = 2(q-2)+(q-1)$
$+(q-3)+0+2\cdot 2+$
$+3\cdot 0 = 4q-4$

к) 

$q+2 \quad q \quad q$

$x = 4(q-2)+0+2\cdot 0+3\cdot 1 = 4q-5$

В случае ж) имеем $2q^2-6q+7 = 6(q-1)$, т. е. $2q^2-12q+13 = 0$ и поэтому $q = \frac{6\pm\sqrt{10}}{2}$, что невозможно, так как q — целое число.

В остальных случаях всегда выполняется $x < 6q-9$, так как $q \geqslant 4$. Следовательно, $2q^2-6q+7 < 6q-9$, т. е. $q^2-6q+8 < 0$ и поэтому $2 < q < 4$, что противоречиво.

4-й случай. Пусть $v = (q+1, q+1, q)$. Тогда $e = 3+1+1 = 5$ и

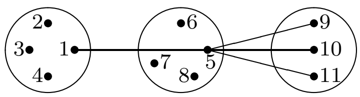
$$\xi_1 - \xi_2 - 2\xi_3 = -(I_3(u) - I_3(v)) = 3(q+2)+(q+2)+q = 5q+8.$$

Очевидно,

$$\xi_1 = e_{12}q + e_{23}(q+1) + e_{31}(q+1) \leqslant (e_{12}+e_{23}+e_{31})(q+1) = 5(q+1) < 5q+8.$$

Тогда $\xi_1 - \xi_2 - 2\xi_3 < 5q+8$, что противоречиво.

Лемма 2. *Граф* $G = K(6,3,2)$ *не является хроматически эквивалентным графу* H*, полученному из* $K(4,4,3)$ *отбрасыванием четырех ребер следующего вида:*



$4 \quad 4 \quad 3$

Доказательство. Очевидно, $pt(G,4) = 2^5 + 2^2 + 2^1 - 3 = 35$.

Подсчитаем $pt(H,4)$. Число разбиений на четыре коклики, одна из которых есть $\{1,5\}$, равно 1. Число разбиений на четыре коклики, одна из которых содержит 5, строго содержится в множестве $\{5,9,10,11\}$ и содержит не менее двух элементов, равно $2^3 - 2 = 6$. Число разбиений на четыре коклики, одна из которых есть $\{5,9,10,11\}$, равно $pt(K(4,3),3) = 2^3 + 2^2 - 2 = 10$.

Таким образом,

$$pt(H,4) = pt(K(4,4,3),4) + 1 + 6 + 10 = 2^3 + 2^3 + 2^2 - 3 + 17 = 34.$$

Итак, $pt(G,4) \neq pt(H,4)$. Отсюда следует заключение леммы.

Предложение 5. *Граф* $G = K(q+3,q,q-1)$ *является* χ*-определяемым при* $q \geqslant 3$.

Доказательство. Для графа H в данном случае разбиение v может совпадать с одним из следующих разбиений: $(q+2,q+1,q-1)$, $(q+2,q,q)$, $(q+1,q+1,q)$.

1-й случай. Пусть $v = (q+2,q+1,q-1)$. Тогда $e = 2$ и $\xi_2 \leqslant 1$, $\xi_3 = 0$ и $\xi_1 - \xi_2 = -(I_3(u) - I_3(v)) = 2(q-1)$. Рассмотрим два подслучая.

1.1. Пусть $\xi_2 = 0$. Тогда

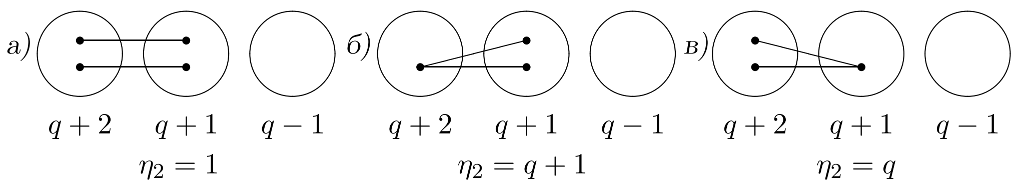
$$2(q-1) = \xi_1 = e_{12}(q-1) + e_{23}(q+2) + e_{31}(q+1).$$

Отсюда следует $e_{12} = 2$ и $e_{23} = e_{31} = 0$. Теперь ясно, что

$$\eta = 2\binom{q-1}{2}, \quad \eta_1 = 2(q+1)q, \quad \eta_3 = \eta_4 = 0 \quad \text{и}$$

$$\eta_2 = I_4(u) - I_4(v) - \eta + \eta_1 = -5q + 2 - (q-1)(q-2) + 2(q+1)q = q^2.$$

Рассмотрим три возможных случая и в каждом из них подсчитаем η_2:



В любом из случаев выполняется $\eta_2 < q+2$. Поэтому $q^2 < q+2$, т. е. $-1 < q < 2$, что противоречиво.

1.2. Пусть $\xi_2 = 1$. Тогда $\xi_1 - 1 = 2(q-1)$ влечет

$$2q - 1 = \xi_1 = e_{12}(q-1) + e_{23}(q+2) + e_{31}(q+1),$$

что невозможно, так как $2q-1$ непредставимо в виде суммы двух (не обязательно различных) чисел из множества $\{q-1, q+2, q+1\}$.

2-й случай. Пусть $v = (q+2, q, q)$. Тогда $e = 2+1 = 3$, $\xi_2 \leqslant 2$, $\xi_3 \leqslant 1$ и

$$\xi_1 - \xi_2 - 2\xi_3 = -(I_3(u) - I_3(v)) = 2(q-1) + (q+2) = 3q.$$

Кроме того, поскольку $\eta_4 = 0$, мы имеем

$$\eta - \eta_1 + \eta_2 + 2\eta_3 = I_4(u) - I_4(v) = (-5q+2) + (2q+1) = -3q+3.$$

Случаи	e_{12}	e_{23}	e_{31}
1	0	3	0
2	1	2	0
3	2	1	0
4	1	1	1
5	3	0	0
6	2	0	1

Заметим, что сейчас e_{12} и e_{31} играют симметричную роль. Поэтому проведем классификацию возможных случаев по e_{23}. Воспользуемся также тем, что

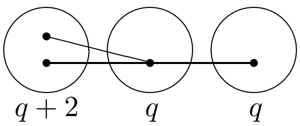
$$\xi_1 = e_{12}q + e_{23}(q+2) + e_{31}q.$$

Рассмотрим шесть случаев.

2.1. Пусть $e_{23} = 3$ и $e_{12} = e_{31} = 0$. В этом случае $\xi_2 = \xi_3 = 0$ и $\xi_1 = 3(q+2)$, поэтому $3q = \xi_1 - \xi_2 - 2\xi_3 = 3(q+2)$, что невозможно.

2.2. Пусть $e_{12} = 1$, $e_{23} = 2$, $e_{31} = 0$. Здесь $\xi_3 = 0$ и $\xi_1 = q + 2(q+2) = 3q+4$, поэтому $3q + 4 - \xi_2 = 3q$. Следовательно, $\xi_2 = 4$, что невозможно.

2.3. Пусть $e_{12} = 2$, $e_{23} = 1$, $e_{31} = 0$. Здесь $\xi_3 = 0$ и $\xi_1 = 2q + (q+2) = 3q+2$, поэтому $3q + 2 - \xi_2 = 3q$, т. е. $\xi_2 = 2$. Следовательно, ребра из E имеют вид



Тогда

$$\eta = 2\binom{q-1}{2} + \binom{q}{2} = \frac{1}{2}(q-1)(3q-4),$$
$$\eta_1 = 2(q+1)(q-1) + (q-1)^2, \quad \eta_2 = q-1, \quad \eta_3 = 0,$$

откуда получаем

$$-3(q-1) = \eta - \eta_1 + \eta_2 + 2\eta_3 = \frac{1}{2}(q-1)(3q-4) - 2(q+1)(q-1) - (q-1)^2 + (q+1).$$

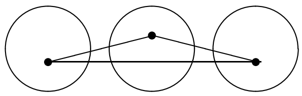
Сокращая на $q-1$, выводим $q = \frac{2}{3}$, что невозможно.

2.4. Пусть $e_{12} = e_{23} = e_{31} = 1$. В этом случае $\eta_1 = 2(q+1)(q-1) + (q-1)^2$, $\eta_2 = \eta_3 = 0$, поэтому

$$\eta = -3q + 3 + \eta_1 - \eta_2 - 2\eta_3 = -3q + 3 + 2(q+1)(q-1) + (q-1)^2 = \\ = (q-1)(3q-2) = 3q^2 - 5q + 2.$$

Кроме того, имеем $\xi_1 = q + (q+2) + q = 3q + 2$ и $\xi_1 - \xi_2 - 2\xi_3 = 3q$. Откуда $\xi_2 + 2\xi_3 = 2$. Из последнего равенства следует, что ξ_2 четно и либо $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 1$, либо $\xi_2 = 2$, $\xi_3 = 0$. Рассмотрим два этих подслучая.

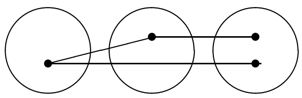
2.4.1. Пусть $\xi_2 = 0$ и $\xi_3 = 1$. Тогда ребра из E имеют вид



$q+2$ $\quad q \quad q$

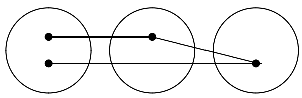
Поэтому $\eta = 2\binom{q-1}{2} + \binom{q+1}{2} = \frac{1}{2}(3q^2 - 5q + 4)$.

2.4.2. Пусть $\xi_2 = 2$ и $\xi_3 = 0$. Возможны две ситуации по расположению ребер из E (с точностью до симметрии).

а) 

$q+2 \quad q \quad q$

$$\eta = \binom{q-2}{2} + \binom{q+1}{2} + \binom{q-1}{2} = \\ = \frac{1}{2}(3q^2 - 7q + 8)$$

б) 

$q+2 \quad q \quad q$

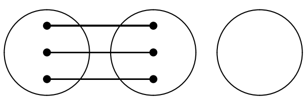
$$\eta = \binom{q-1}{2} + \binom{q}{2} + \binom{q-1}{2} = \\ = \frac{1}{2}(3q^2 - 7q + 4)$$

В любом из подслучаев, входящих в 2.4.1 и 2.4.2, имеем соотношение $\eta < \frac{1}{2}(3q^2 - 4q + 13)$. Следовательно, $3q^2 - 5q + 2 < \frac{1}{2}(3q^2 - 4q + 13)$, т. е. $q^2 - 2q - 3 < 0$. Отсюда получаем $-1 < q < 3$, что невозможно.

2.5. Пусть $e_{12} = 3$, $e_{23} = e_{31} = 0$. Тогда $\eta = 3\binom{q}{2}$, $\quad \eta_1 = 3(q+1)(q-1)$ и

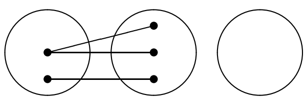
$$\eta_2 + 2\eta_3 = -3(q-1) - \eta + \eta_1 = -3(q-1) - 3\binom{q}{2} + 3(q+1)(q-1) = \frac{1}{2}(3q^2 - 3q).$$

Рассмотрим шесть возможных случаев и в каждом подсчитаем $\eta_2 + 2\eta_3 = x$:

а) 

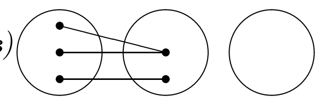
$q+2 \quad q \quad q$

$x = \binom{3}{2} + 2 \cdot 0 = 3$

б) 

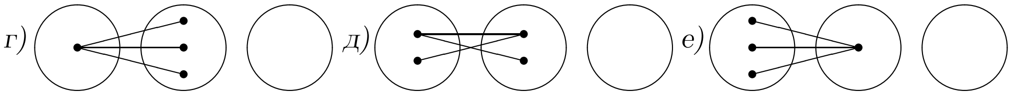
$q+2 \quad q \quad q$

$x = (q+1) + 2+$
$+2 \cdot 0 = q + 3$

в) 

$q+2 \quad q \quad q$

$x = (q-1) + 2+$
$+2 \cdot 0 = q + 1$



$q+2 \quad q \quad q$ — $x = \binom{3}{2}(q+1)+$ $+2\cdot 0 = 3(q+1)$

$q+2 \quad q \quad q$ — $x = q + (q-2)+$ $+2\cdot 1 = 2q$

$q+2 \quad q \quad q$ — $x = 3(q-1) + 2\cdot 0 =$ $= 3(q-1)$

В случае г) имеем $3(q+1) = \frac{1}{2}(3q^2-3q)$, поэтому $q^2-3q-2=0$ и $q = \frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$, что невозможно, так как q — целое число.

В остальных случаях имеем $x < 3q$. Поэтому $\frac{1}{2}(3q^2 - 3q) < 3q$, откуда следует $\frac{1}{2}(q-1) < 1$, т. е. $q < 3$, что невозможно.

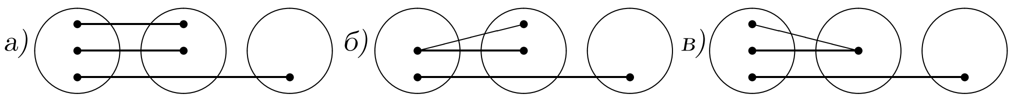
2.6. Здесь $e_{12} = 2$, $e_{23} = 0$, $e_{31} = 1$, $\xi_3 = 0$ и $\xi_1 = 2q + q = 3q$. Поэтому $3q = \xi_1 - \xi_2 - 2\xi_3 = 3q - \xi_2$, т. е. $\xi_2 = 0$. В силу условия $\xi_2 = 0$ имеем

$$\eta = 2\binom{q}{2} + \binom{q}{2} = 3\binom{q}{2}, \quad \eta_1 = 3(q+1)(q-1), \quad \eta_3 = 0$$

и, следовательно,

$$\eta_2 = -3(q-1) - \eta + \eta_1 = -3(q-1) - 3\binom{q}{2} + 3(q^2-1) = \frac{1}{2}(3q^2 - 3q).$$

В силу условия $\xi_2 = 0$ возможны три случая, в каждом из которых подсчитаем η_2:



$q+2 \quad q \quad q$ — $\eta_2 = 1$

$q+2 \quad q \quad q$ — $\eta_2 = q+1$

$q+2 \quad q \quad q$ — $\eta_2 = q-1$

В любом из случаев имеем $\eta_2 < 3q$. Поэтому $\frac{1}{2}(3q^2 - 3q) < 3q$, откуда следует $q < 3$, что противоречиво.

3-й случай. Пусть $v = (q+1, q+1, q)$. Тогда $e = 2+1+1 = 4$ и

$$\xi_1 - \xi_2 - 2\xi_3 = -(I_3(u) - I_3(v)) = 2(q-1) + (q+2) + q = 4q.$$

Кроме того, мы имеем

$$\eta - \eta_1 + \eta_2 + 2\eta_3 + 3\eta_4 = I_4(u) - I_4(v) = (-5q+2) + (2q+1) + (-q) = -4q + 3.$$

Заметим, что сейчас e_{23} и e_{31} играют симметричную роль. Поэтому проведем классификацию возможных случаев по e_{12}. Воспользуемся также тем, что

$$\xi_1 = e_{12}q + e_{23}(q+1) + e_{31}(q+1).$$

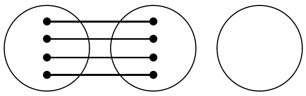
Рассмотрим девять случаев.

Случаи	e_{12}	e_{23}	e_{31}
1	4	0	0
2	3	1	0
3	2	2	0
4	2	1	1
5	1	3	0
6	1	2	1
7	0	4	0
8	0	3	1
9	0	2	2

3.1. Пусть $e_{12} = 4$, $e_{23} = e_{31} = 0$. Тогда $\eta = 4\binom{q}{2}$, $\eta_1 = 4q^2$ и

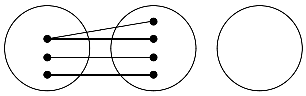
$$\eta_2 + 2\eta_3 + 3\eta_4 = -4q + 3 - \eta + \eta_1 = -4q + 3 - 2q(q-1) + 4q^2 = 2q^2 - 2q + 3.$$

Рассмотрим десять возможных случаев и в каждом из них подсчитаем $\eta_2 + 2\eta_3 + 3\eta_4 = x$:

а) 

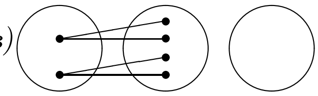
$q+1$ $q+1$ q

$x = \binom{4}{2} + 2\cdot 0 +$
$+3\cdot 0 = 6$

б) 

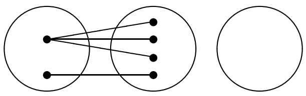
$q+1$ $q+1$ q

$x = q + 5 + 2\cdot 0 +$
$+3\cdot 0 = q + 5$

в) 

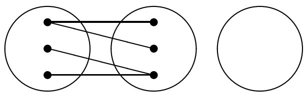
$q+1$ $q+1$ q

$x = 2q + 4 + 2\cdot 0 +$
$+3\cdot 0 = 2q + 4$

г) 

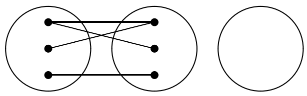
$q+1$ $q+1$ q

$x = \binom{3}{2}q + 3 + 2\cdot 0 +$
$+3\cdot 0 = 3q + 3$

д) 

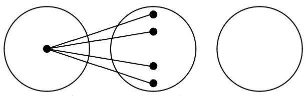
$q+1$ $q+1$ q

$x = 2q + 4$

е) 

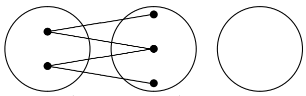
$q+1$ $q+1$ q

$x = 2(q-1) + 3 + 2\cdot 1 +$
$+3\cdot 0 = 2q + 3$

ж) 

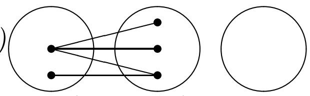
$q+1$ $q+1$ q

$x = \binom{4}{2}q + 2\cdot 0 +$
$+3\cdot 0 = 6q$

з) 

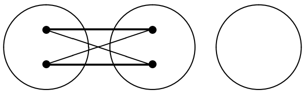
$q+1$ $q+1$ q

$x = 2(q-1) + (q-2)$
$+1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 0 =$
$= 3q + 1$

и) 

$q+1$ $q+1$ q

$x = q + 2(q-1) +$
$+(q-2) + 2\cdot 2 +$
$+3\cdot 0 = 4q$

к) 

$q+1 \qquad q+1 \qquad q$

$x = 4(q-1) + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 4q - 1$

В случае ж) получаем $6q = 2q^2 - 2q + 3$, откуда следует $q = \frac{4 \pm \sqrt{10}}{2}$, что невозможно, так как q — целое число.

В остальных случаях имеем $x < 6q - 3$, т. е. $2q^2 - 2q + 3 < 6q - 3$. Откуда следует $1 < q < 3$, что противоречиво.

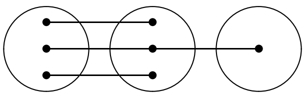
3.2. Пусть $e_{12} = 3$, $e_{23} = 1$ и $e_{31} = 0$. Здесь $\xi_3 = 0$ и $\xi_1 = 3q + (q+1) = 4q+1$, откуда вытекает $4q + 1 - \xi_2 = 4q$, т. е. $\xi_2 = 1$. Тогда

$$\eta = 2\binom{q}{2} + \binom{q-1}{2} + \binom{q}{2} = 3\binom{q}{2} + \binom{q-1}{2},$$

так как в силу $\xi_2 = 1$ одно ребро из E_{23} смежно точно одному ребру из E_{12}, $\eta_1 = 3q^2 + q(q-1)$, $\eta_4 = 0$ и

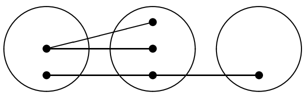
$$\begin{aligned} \eta_2 + 2\eta_3 &= -4q + 3 - \eta + \eta_1 = \\ &= -4q + 3 - \frac{3}{2}q(q-1) - \frac{1}{2}(q-1)(q-2) + 3q^2 + q(q-1) = 2q^2 - 2q + 2. \end{aligned}$$

Рассмотрим шесть возможных случаев и в каждом из них подсчитаем $\eta_2 + 2\eta_3 = x$:

а) 

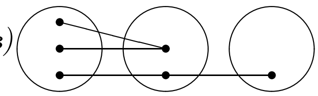
$q+1 \qquad q+1 \qquad q$

$x = \binom{3}{2} + 2 \cdot 0 = 3$

б) 

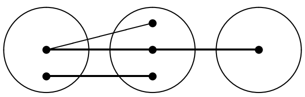
$q+1 \qquad q+1 \qquad q$

$x = q + 2$

в) 

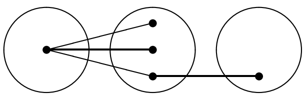
$q+1 \qquad q+1 \qquad q$

$x = q + 2$

г) 

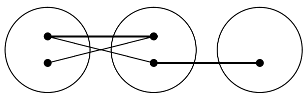
$q+1 \qquad q+1 \qquad q$

$x = q + 2 + 2 \cdot 0 =$
$= q + 2$

д) 

$q+1 \qquad q+1 \qquad q$

$x = \binom{3}{2}q + 2 \cdot 0 = 3q$

е) 

$q+1 \qquad q+1 \qquad q$

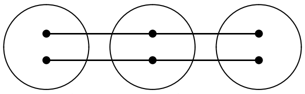
$x = 2(q-1) +$
$+ 2 \cdot 1 = 2q$

Во всех случаях имеем $x < 4q - 2$, поэтому $2q^2 - 2q + 2 < 4q - 2$. Отсюда следует $1 < q < 2$, что противоречиво.

3.3. Пусть $e_{12} = e_{23} = 2$ и $e_{31} = 0$. Здесь $\xi_3 = 0$ и $\xi_1 = 2q+2(q+1) = 4q+2$, откуда $4q + 2 - \xi_2 = 4q$, т. е. $\xi_2 = 2$. Тогда $\eta_1 = 2q^2 + 2q(q-1)$, $\eta_3 = \eta_4 = 0$ и

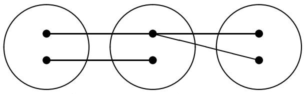
$$\eta + \eta_2 = -4q + 3 + \eta_1 = -4q + 3 + 2q^2 + 2q^2 - 2q = 4q^2 - 6q + 3.$$

Рассмотрим восемь возможных случаев и в каждом из них подсчитаем $\eta + \eta_2 = x$:

а) 

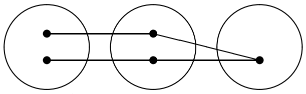
$q+1 \quad q+1 \quad q$

$x = 2\binom{q-1}{2} + 2\binom{q}{2} + 2 = 2q^2 - 4q + 4$

б) 

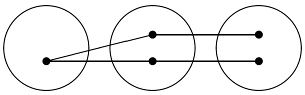
$q+1 \quad q+1 \quad q$

$x = \binom{q-2}{2} + \binom{q}{2} + 2\binom{q}{2} + 1 + q = 2q^2 - 4q + 4 + q$

в) 

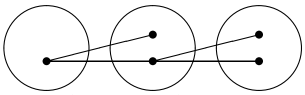
$q+1 \quad q+1 \quad q$

$x = 2\binom{q-1}{2} + 2\binom{q}{2} + 1 + (q-1) = 2q^2 - 4q + 2 + q$

г) 

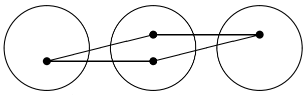
$q+1 \quad q+1 \quad q$

$x = 2\binom{q-1}{2} + 2\binom{q}{2} + q + 1 = 2q^2 - 4q + 3 + q$

д) 

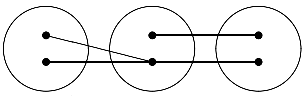
$q+1 \quad q+1 \quad q$

$x = \binom{q}{2} + \binom{q-2}{2} + 2\binom{q}{2} + q + q = 2q^2 - 4q + 3 + 2q$

е) 

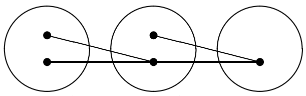
$q+1 \quad q+1 \quad q$

$x = 2\binom{q-1}{2} + 2\binom{q}{2} + q + (q-1) = 2q^2 - 4q + 1 + 2q$

ж) 

$q+1 \quad q+1 \quad q$

$x = 2\binom{q-1}{2} + \binom{q+1}{2} + \binom{q-1}{2} + q + 1 = 2q^2 - 4q + 4 + q$

з) 

$q+1 \quad q+1 \quad q$

$x = 2\binom{q-1}{2} + \binom{q+1}{2} + \binom{q-1}{2} + q + (q-1) = 2q^2 - 4q + 2 + 2q$

Во всех случаях имеем $x < 2q^2 - 4q + 9 + 2q$, поэтому

$$4q^2 - 6q + 3 < 2q^2 - 4q + 9 + 2q.$$

Отсюда следует $-1 < q < 3$, что противоречиво.

3.4. Пусть $e_{12} = 2$ и $e_{23} = e_{31} = 1$. Здесь

$$\xi_1 = 2q + (q+1) + (q+1) = 4q + 2,$$

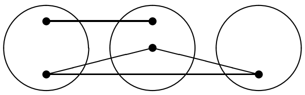
откуда вытекает $4q + 2 - \xi_2 - 2\xi_3 = 4q$, т. е. $\xi_2 + 2\xi_3 = 2$. Из последнего равенства следует, что ξ_2 четно и либо $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 1$, либо $\xi_2 = 2$, $\xi_3 = 0$.

Кроме того, имеем $\eta_1 = 2q^2 + 2q(q-1)$, $\eta_3 = \eta_4 = 0$ и

$$\eta + \eta_2 = -4q + 3 + \eta_1 = -4q + 3 + 2q^2 + 2q^2 - 2q = 4q^2 - 6q + 3.$$

Рассмотрим два возможных подслучая и подсчитаем $\eta + \eta_2 = x$.

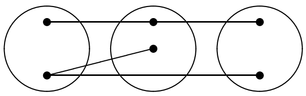
3.4.1. Пусть $\xi_2 = 0$ и $\xi_3 = 1$. Тогда



$q+1 \quad q+1 \quad q$

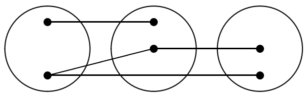
$$x = \binom{q}{2} + \binom{q-1}{2} + \binom{q}{2} + \binom{q}{2} + 1 = 2q^2 - 3q + 2.$$

3.4.2. Пусть $\xi_2 = 2$ и $\xi_3 = 0$. Рассмотрим восемь возможных случаев:

а) 

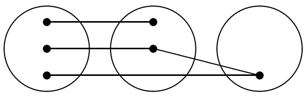
$q+1 \quad q+1 \quad q$

$x = 2\binom{q-1}{2} + 2\binom{q}{2} + 1 = 2q^2 - 4q + 3$

б) 

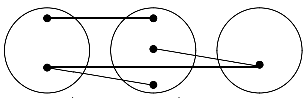
$q+1 \quad q+1 \quad q$

$x = \binom{q}{2} + \binom{q-2}{2} + 2\binom{q}{2} + 1 = 2q^2 - 4q + 3 + 1$

в) 

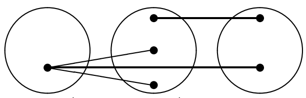
$q+1 \quad q+1 \quad q$

$x = \binom{q}{2} + \binom{q-1}{2} + \binom{q-1}{2} + \binom{q}{2} + 1 = 2q^2 - 4q + 3$

г) 

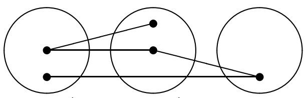
$q+1 \quad q+1 \quad q$

$x = \binom{q}{2} + \binom{q-1}{2} + \binom{q}{2} + \binom{q-1}{2} + 1 = 2q^2 - 4q + 3$

д) 

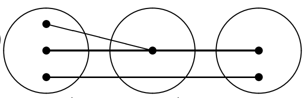
$q+1 \quad q+1 \quad q$

$x = 2\binom{q-1}{2} + \binom{q+1}{2} + \binom{q-1}{2} + q = 2q^2 - 4q + 3 + q$

е) 

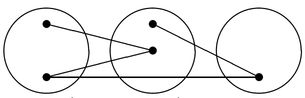
$q+1 \quad q+1 \quad q$

$x = \binom{q}{2} + \binom{q-1}{2} + \binom{q-1}{2} + \binom{q}{2} + q = 2q^2 - 4q + 2 + q$

ж) 

$q+1 \quad q+1 \quad q$

$x = 2\binom{q-1}{2} + \binom{q-1}{2} + \binom{q+1}{2} + q = 2q^2 - 4q + 3 + q$

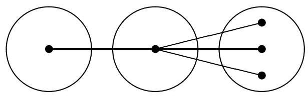
з) 

$q+1 \quad q+1 \quad q$

$x = \binom{q}{2} + \binom{q-1}{2} + \binom{q}{2} + \binom{q-1}{2} + q = 2q^2 - 4q + 2 + q$

Во всех ситуациях, входящих в подслучаи 3.4.1 и 3.4.2, выполняется $x < 2q^2 - 3q + 3 + q$. Следовательно, $4q^2 - 6q + 3 < 2q^2 - 3q + 3 + q$, т. е. $q^2 - 2q < 0$. Отсюда получаем $0 < q < 2$, что противоречиво.

3.5. Пусть $e_{12} = 1$, $e_{23} = 3$ и $e_{31} = 0$. Здесь $\xi_3 = 0$ и $\xi_1 = q+3(q+1) = 4q+3$, откуда вытекает $4q + 3 - \xi_2 = 4q$, т. е. $\xi_2 = 3$. Тогда ребра из E имеют вид



Поэтому имеем

$$\eta = \binom{q-3}{2} + 3\binom{q}{2} = 2q^2 - 5q + 6,$$
$$\eta_1 = q^2 + 3q(q-1), \quad \eta_2 = 3q, \quad \eta_3 = \eta_4 = 0.$$

Следовательно,

$$-4q + 3 = \eta - \eta_1 + \eta_2 = 2q^2 - 5q + 6 - q^2 - 3q^2 + 3q + 3q,$$

т. е. $2q^2 - 5q - 3 = 0$. Отсюда получаем $q = 3$ и приходим к противоречию в силу леммы 2.

3.6. Пусть $e_{12} = 1$, $e_{23} = 2$ и $e_{31} = 1$. Здесь $\xi_1 = q+2(q+1)+(q+1) = 4q+3$, откуда вытекает

$$4q + 3 - \xi_2 - 2\xi_3 = 4q, \quad \text{т. е.} \quad \xi_2 + 2\xi_3 = 3.$$

Из последнего равенства следует, что ξ_2 нечетно и либо $\xi_2 = 1$, $\xi_3 = 1$, либо $\xi_2 = 3$, $\xi_3 = 0$.

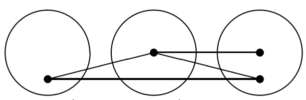
Кроме того, имеем

$$\eta_1 = q^2 + 3q(q-1), \quad \eta_3 = \eta_4 = 0 \quad \text{и}$$
$$\eta + \eta_2 = -4q + 3 + \eta_1 = -4q + 3 + q^2 + 3q^2 - 3q = 4q^2 - 7q + 3.$$

Рассмотрим два возможных подслучая и подсчитаем $\eta + \eta_2 = x$.

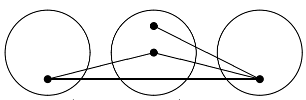
3.6.1. Пусть $\xi_2 = \xi_3 = 1$. Здесь возможны два случая.

а)



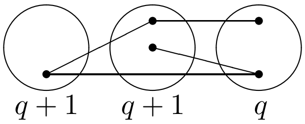
$x = \binom{q-2}{2} + 2\binom{q}{2} + \binom{q}{2} + q =$
$= 2q^2 - 4q + 3 + q$

б)

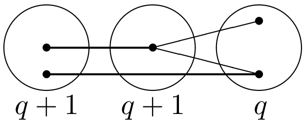


$x = \binom{q-1}{2} + 2\binom{q}{2} + \binom{q-1}{2} + (q-1) =$
$= 2q^2 - 4q + 1 + q$

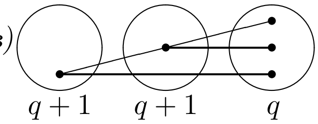
3.6.2. Пусть $\xi_2 = 3$ и $\xi_3 = 0$. Здесь возможны пять случаев.

а)


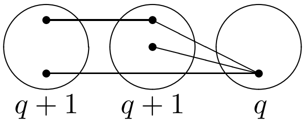
$x = \binom{q-2}{2} + 2\binom{q}{2} + \binom{q-1}{2} + 1 = 2q^2 - 5q + 5$

б)


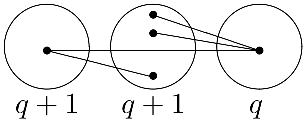
$x = \binom{q-2}{2} + \binom{q}{2} + \binom{q-1}{2} + \binom{q}{2} + q = 2q^2 - 5q + 4 + q$

в)


$x = \binom{q-3}{2} + 2\binom{q}{2} + \binom{q}{2} + q = 2q^2 - 5q + 6 + q$

г)


$x = \binom{q-1}{2} + \binom{q-1}{2} + \binom{q}{2} + \binom{q-1}{2} + (q-1) = 2q^2 - 5q + 2 + q$

д)


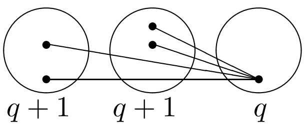
$x = \binom{q-1}{2} + 2\binom{q}{2} + \binom{q-2}{2} + (q-1) = 2q^2 - 5q + 3 + q$

Во всех ситуациях, входящих в подслучаи 3.6.1 и 3.6.2, имеем $x < 2q^2 - 4q + 9 + q$. Следовательно, $4q^2 - 7q + 3 < 2q^2 - 4q + 9 + q$, т. е. $q^2 - 2q - 3 < 0$. Отсюда вытекает $-1 < q < 3$, что противоречиво.

3.7. Пусть $e_{12} = 0$, $e_{23} = 4$ и $e_{31} = 0$. Здесь $\xi_2 = \xi_3 = 0$ и $\xi_1 = 4(q+1)$, откуда следует $4q + 4 = \xi_1 - \xi_2 - 2\xi_3 = 4q$, пришли к противоречию.

3.8. Пусть $e_{12} = 0$, $e_{23} = 3$ и $e_{31} = 1$. Здесь $\xi_1 = 3(q+1) + (q+1) = 4q + 4$ и $\xi_3 = 0$, откуда вытекает $4q + 4 - \xi_2 = 4q$, т. е. $\xi_2 = 4$. Последнее равенство невозможно, так как одно ребро не может с тремя ребрами дать значение ξ_2, равное 4.

3.9. Пусть $e_{12} = 0$, $e_{23} = e_{31} = 2$. Здесь $\xi_1 = 2(q+1) + 2(q+1) = 4q + 4$ и $\xi_3 = 0$, откуда вытекает $4q + 4 - \xi_2 = 4q$, т. е. $\xi_2 = 4$. Тогда ребра из E имеют вид



Тогда

$$\eta = 2\binom{q-1}{2} + 2\binom{q-1}{2} = 2q^2 - 6q + 4,$$

$$\eta_1 = 4q(q-1), \quad \eta_2 = (q-1) + (q-1) = 2q - 2, \quad \eta_3 = \eta_4 = 0,$$

поэтому

$$-4q + 3 = \eta - \eta_1 + \eta_2 = 2q^2 - 6q + 4 - 4q^2 + 4q + 2q - 2,$$

т. е. $2q^2 - 4q + 1 = 0$. Отсюда следует $q = \frac{2\pm\sqrt{2}}{2} < 3$, что противоречиво.

Предложение 5 доказано.

Теперь из предложений 1–5 с учетом строения решетки $NPL(n, 3)$ при $r = 2$ вытекает наша теорема.

Высотой элемента в конечной решетке будем, как обычно, называть длину кратчайшей цепи (т. е. число ее звеньев) от данного элемента до наименьшего элемента решетки. Нашу теорему можно переформулировать следующим образом.

Теорема. *Пусть n – натуральное число такое, что $n \equiv 2(\mathrm{mod}\ 3)$ и h – неотрицательное целое число $\leqslant 3$. Тогда любой полный трехдольный n-граф с неодноэлементными долями, имеющий высоту h в решетке $NPL(n, 3)$, является хроматически определяемым.*

Иными словами, теорема утверждает, что при $r = 2$ графы, имеющие неодноэлементные доли и лежащие на четырех «нижних слоях» решетки $NPL(n, 3)$, хроматически определяемы.

1. Асанов М. О., Баранский В. А., Расин В. В. Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.

2. Баранский В. А., Королева Т. А. Хроматическая определяемость некоторых полных трехдольных графов // Изв. Урал. гос. ун-та. 2010. № 74. (Математика. Механика. Информатика; Вып. 12). С. 5–26.

3. Zhao H. Chromaticity and adjoint polynomials of graphs: Ph. D. Thesis / The Netherlands: Wöhrmann Print Service, 2005.

Статья поступила 07.11.2007, окончательный вариант 12.02.2008